

Prüfungsklausur — Höhere Mathematik 1/2 (WS 2025/26)

Termin: 23.02.2026

Hinweise: Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen. Verwendete Sätze sind zu benennen. Es sind weder Formelsammlungen noch elektronische Hilfsmittel erlaubt.

Die Bearbeitung erfolgt auf dem Klausurbogen unter den jeweiligen Aufgaben. Falls nötig, verwenden Sie bitte die angehängten zusätzlichen Seiten für die Bearbeitung. Bitte machen Sie auch entsprechend kenntlich, dass ihre Lösungswege auf den Zusatzseiten fortgesetzt werden.

Mit einem Stern gekennzeichnete Teilaufgaben sind Bonusaufgaben.

Abgaben in Rot-, Grün- oder Bleistift werden nicht gewertet.

Hilfsmittel: **keine**

Bearbeitungszeit: 180 min

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A7	A8	A9	A10	A11	Σ

Aufgabe 1. (Logik) [3+2+2=7 Punkte]

- (a) Definieren Sie die folgenden logischen Verknüpfungen mithilfe von Wahrheitstabellen:

$$p \rightarrow q \quad p \leftrightarrow q, \quad \neg p.$$

Tragen Sie dazu die entsprechenden Wahrheitswerte (w/f) in die untenstehende Tabelle ein.

- (b) Prüfen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle, ob folgende Äquivalenz gilt:

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q)$$

Nutzen Sie dazu untenstehende Tabelle.

- (c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie ihre Antwort.

(i) $\forall_{n \in \mathbb{Z}} \exists_{m \in \mathbb{Z}} : n + m = 0$

(ii) $\exists_{n \in \mathbb{Z}} \forall_{m \in \mathbb{Z}} : n + m = 0$

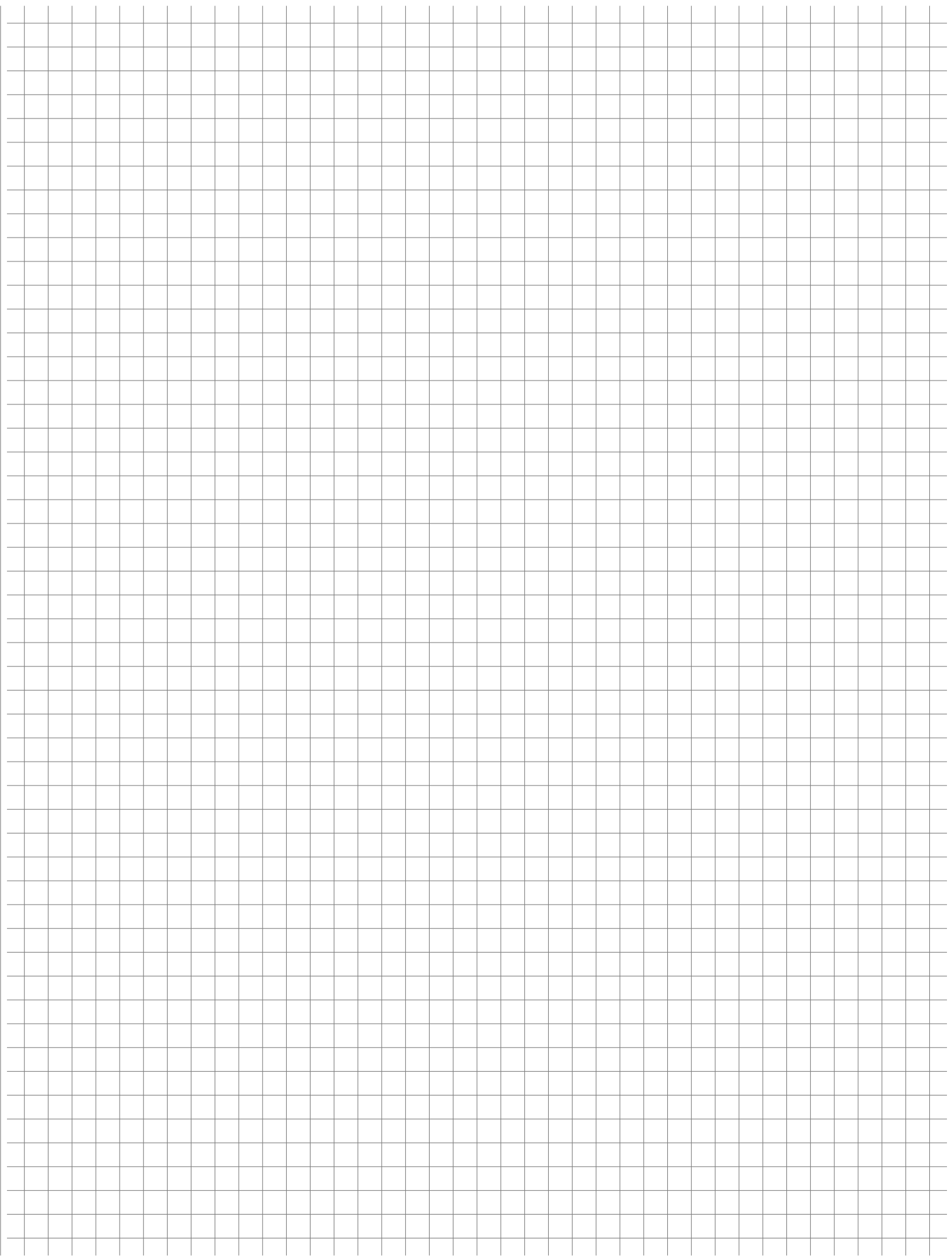
Geben Sie für beide Aussagen deren Negation in Quantorensprache an.

(a)

p	q	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$p \wedge q$
w	w			
w	f			
f	w			
f	f			

(b)

p	q	
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	



Aufgabe 2. (Mengen) [3+2+2=7 Punkte]

Es sei M eine Obermenge und es seien $A, B \subseteq M$ Teilmengen von M .

(a) Geben Sie die Definition folgender Mengen-Operationen an:

$$A^c, \quad A \setminus B, \quad A \cap B$$

Skizzieren Sie die Mengen darüberhinaus als Venn-Diagramme.

Hinweis: Formulieren Sie alle Definitionen mit Aussageformen.

(b) Zeigen Sie schrittweise mithilfe von Venn-Diagrammen, dass folgende Identität gilt:

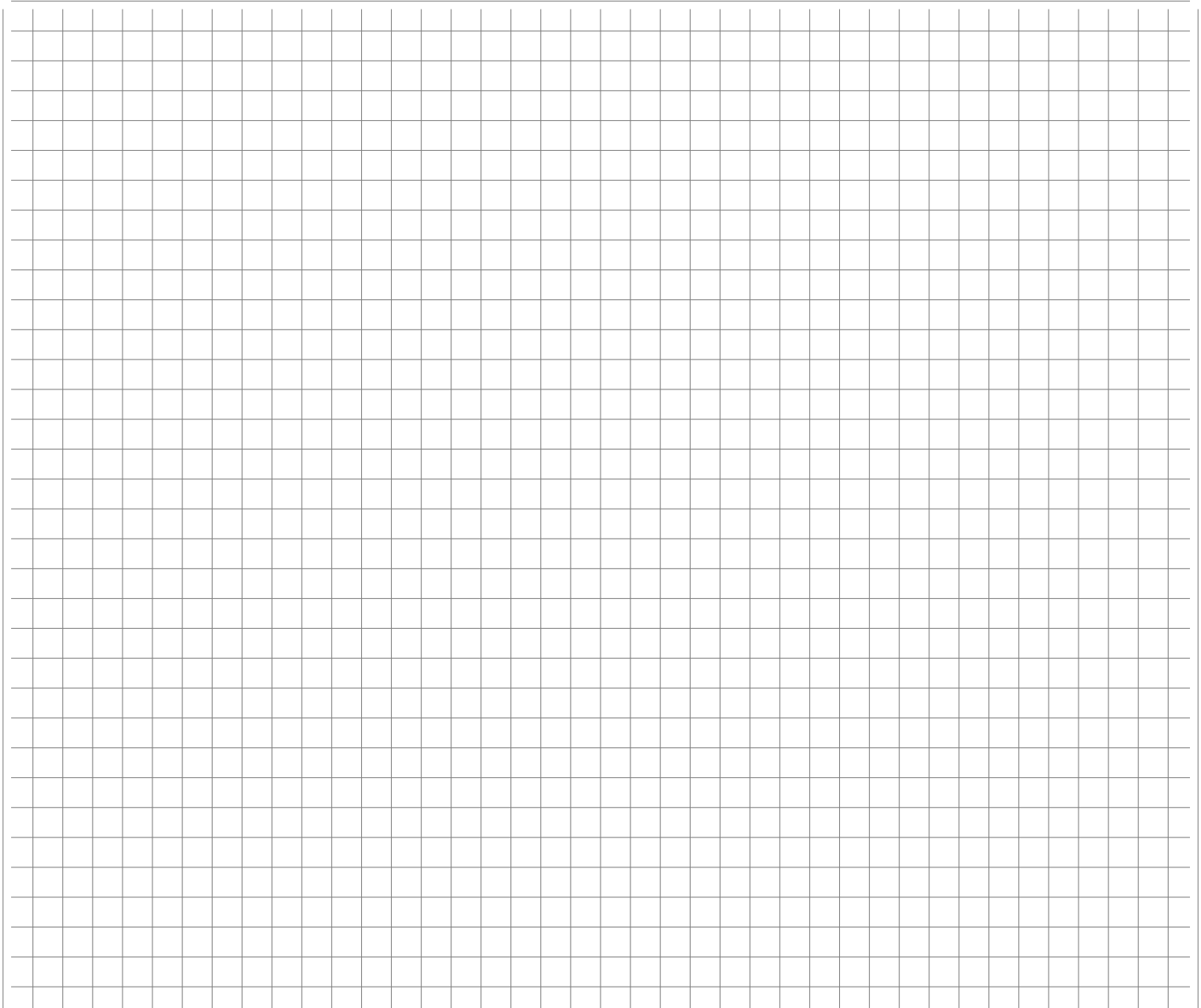
$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(c) Für die Anzahl $\#$ der Elemente zweier Mengen A, B gelte

$$\#A = 10, \quad \#(A \cup B) = 11, \quad \#(A \cap B) = 5.$$

Bestimmen Sie

$$\#B \quad \text{und} \quad \#(A \setminus B).$$

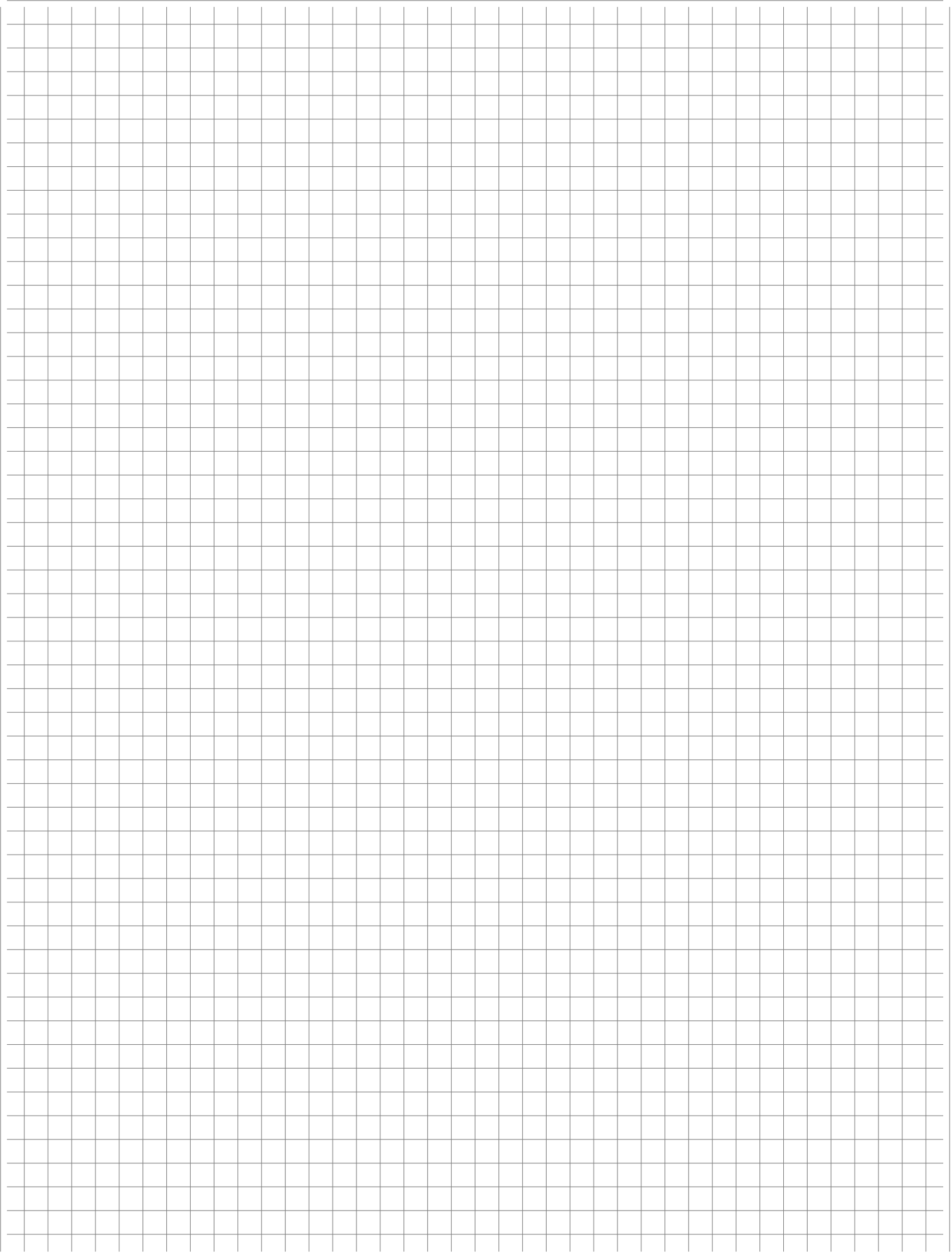




Aufgabe 3. (Komplexe Zahlen) [2+2+2=6 Punkte]

- (a) Es sei $z = x + iy = re^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl, die in kartesischen Koordinaten bzw. in Polarkoordinaten gegeben ist.
- (i) Geben Sie die kartesischen Koordinaten x, y in Abhängigkeit von den Polarkoordinaten r, φ an.
- (ii) Geben Sie die Polarkoordinaten r, φ in Abhängigkeit von den kartesischen Koordinaten x, y an. Für den Winkel φ genügt es, wenn Sie eine Formel für $\tan \varphi$ angeben.
- (b) Sei $z = e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Skizzieren Sie die Lage von z und z^{11} in der komplexen Ebene.
- (c) Sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen:
- (i) $z^3 + iz^2 + 2z = 0$
- (ii) $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = z^2$





Aufgabe 4. (Stetigkeit) [2+1+3+3=9 Punkte]

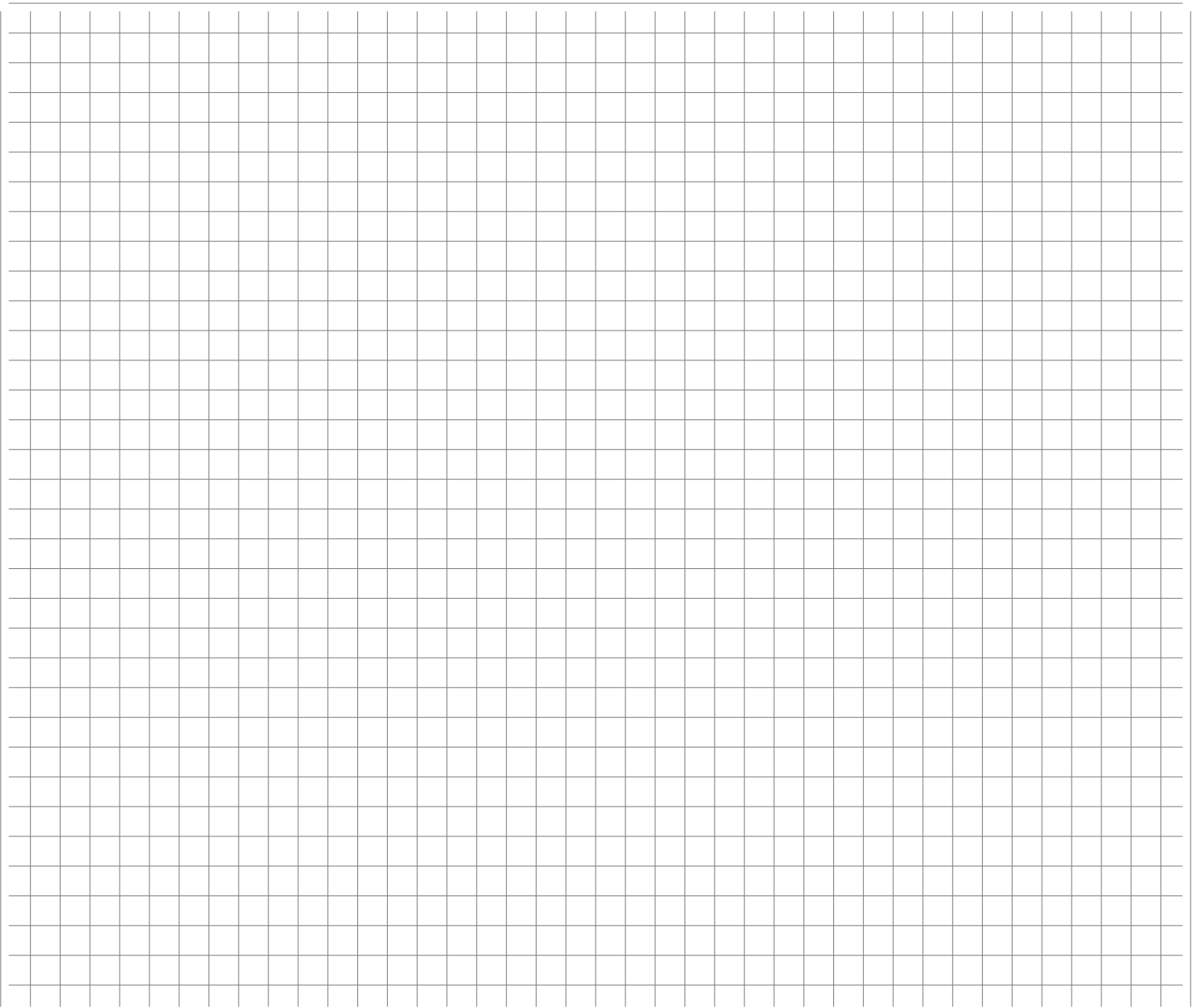
Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (a) Geben Sie die ε - δ -Definition für den linksseitigen und den rechtsseitigen Funktionengrenzwert von f im Punkt x_0 an.
- (b) Geben Sie mithilfe des linksseitigen und des rechtsseitigen Funktionengrenzwerts ein hinreichendes Kriterium dafür an, dass die Funktion f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Sei nun $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in] - \infty, 0], \\ \frac{1}{\sin(\pi x)}, & x \in]0, 1/2[, \\ \frac{2}{2x + 1}, & x \in [1/2, \infty[. \end{cases}$$

- (c) Untersuchen Sie g in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.
- (d) Untersuchen Sie g in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit.





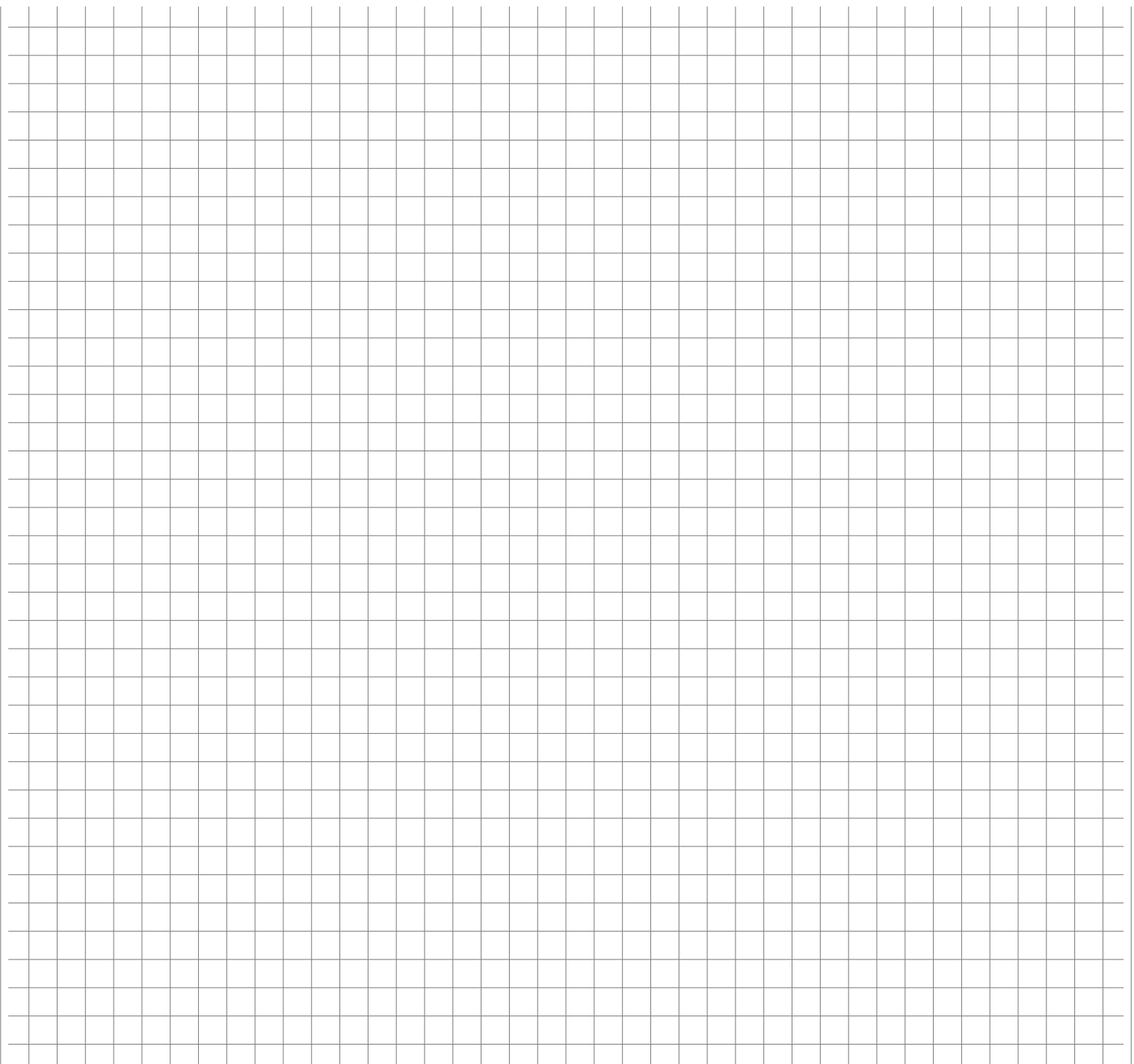
Aufgabe 5. (Kurvendiskussion) [2+2+3+2=9 Punkte]

- (a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition dafür an, dass
- (i) f in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein globales Maximum besitzt;
 - (ii) f in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum besitzt.

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

- (b) Geben Sie erste und zweite Ableitung von g nach x an.
(c) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema sowie deren Art.
(d) Begründen Sie, dass die lokalen Extrema aus (c) auch globale Extrema von g sind.





Aufgabe 6. (Satz von Taylor) [1+1+2+2=6 Punkte]

- (a) Sei $f :]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in]a, b[$ m -fach differenzierbar. Geben Sie die Formel für das Taylorpolynom $T_m(f; x_0, h)$ bis zur Ordnung m an.
- (b) Sei $g :]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie die Definition dafür an, dass

$$f(x) = g(x) + o(x^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

- (c) Sei $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

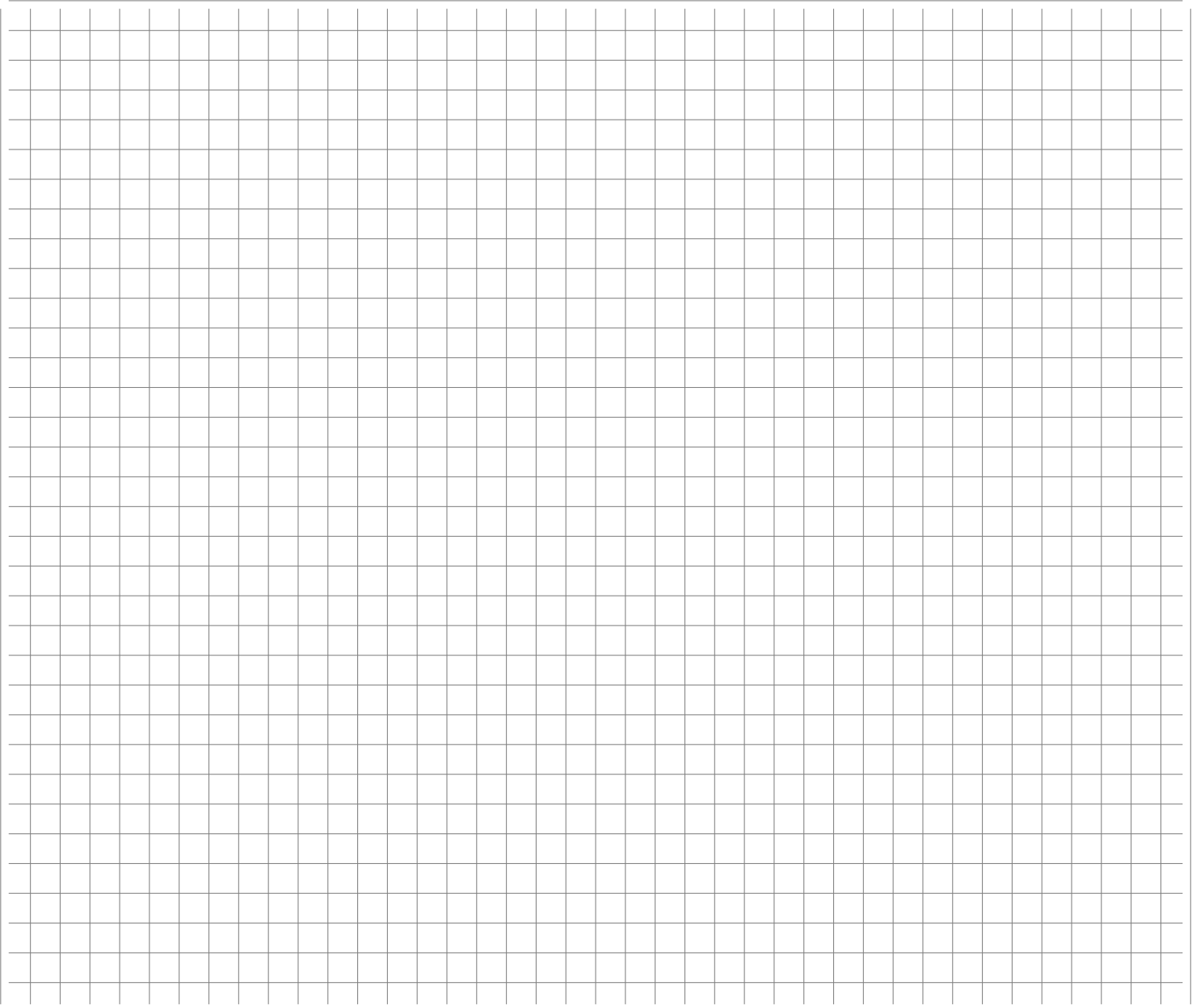
$$f(x) = \sin(\ln(x+1))$$

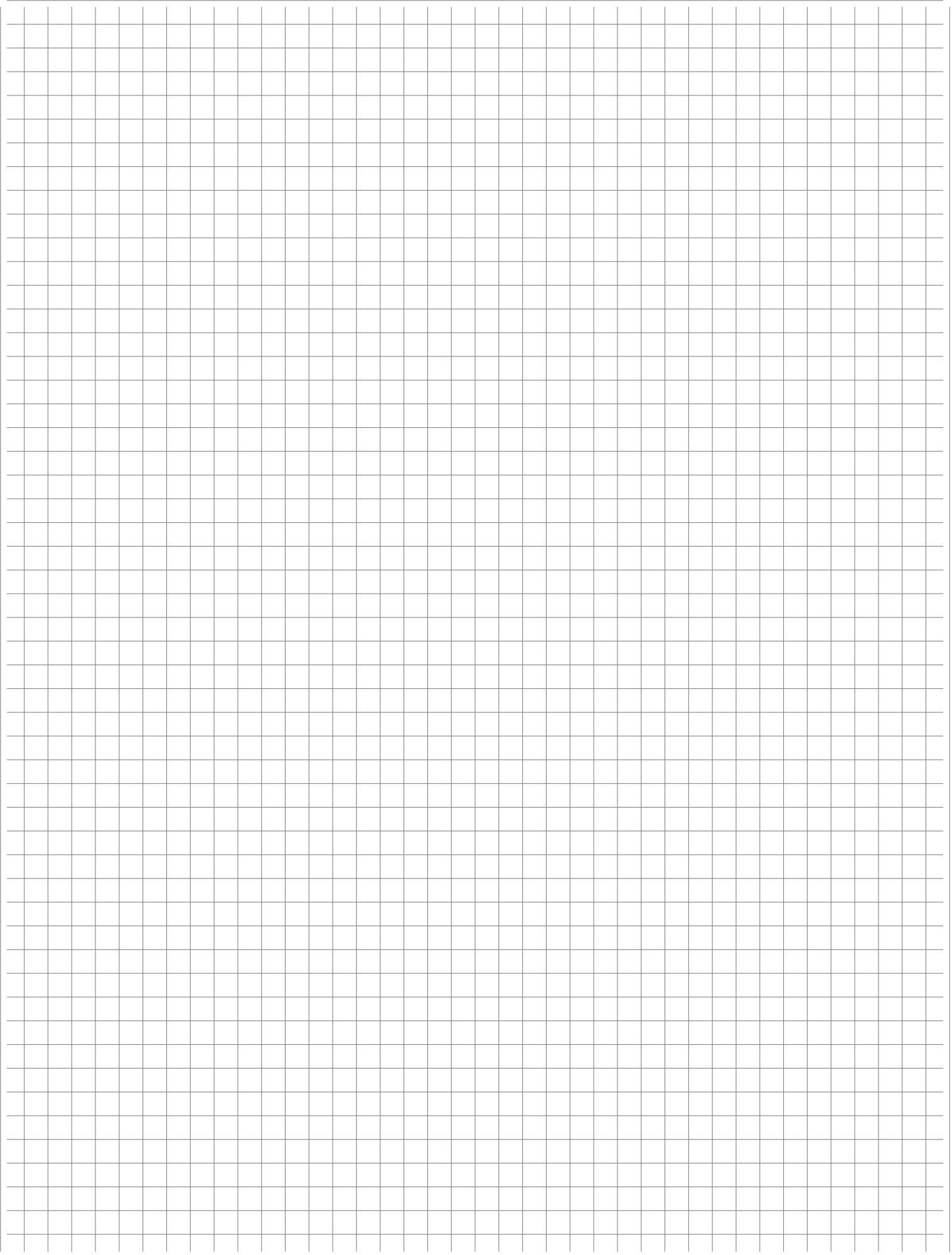
Bestimmen Sie die Taylorpolynome T_1 und T_2 von f im Punkt $x_0 = 0$.

- (d) Zeigen Sie, dass für alle $x \geq 0$

$$\sin(\ln(x+1)) \leq x$$

gilt. Betrachten Sie die Fälle $x \geq 1$ und $0 \leq x < 1$ separat.





Aufgabe 7. (Integrale) [2+2+3=7 Punkte]

(a) Geben Sie

(i) ein notwendiges Kriterium, sowie

(ii) ein hinreichendes Kriterium

dafür an, dass eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

(b) Gegeben seien die Funktionen $f_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x) = -2x, \quad f_2(x) = x^2 + 1.$$

Skizzieren Sie die Menge M gegeben durch

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1] \text{ und } f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

und bestimmen Sie den Flächeninhalt von M .

(c) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} dx$

(ii) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{e^x}} dx$





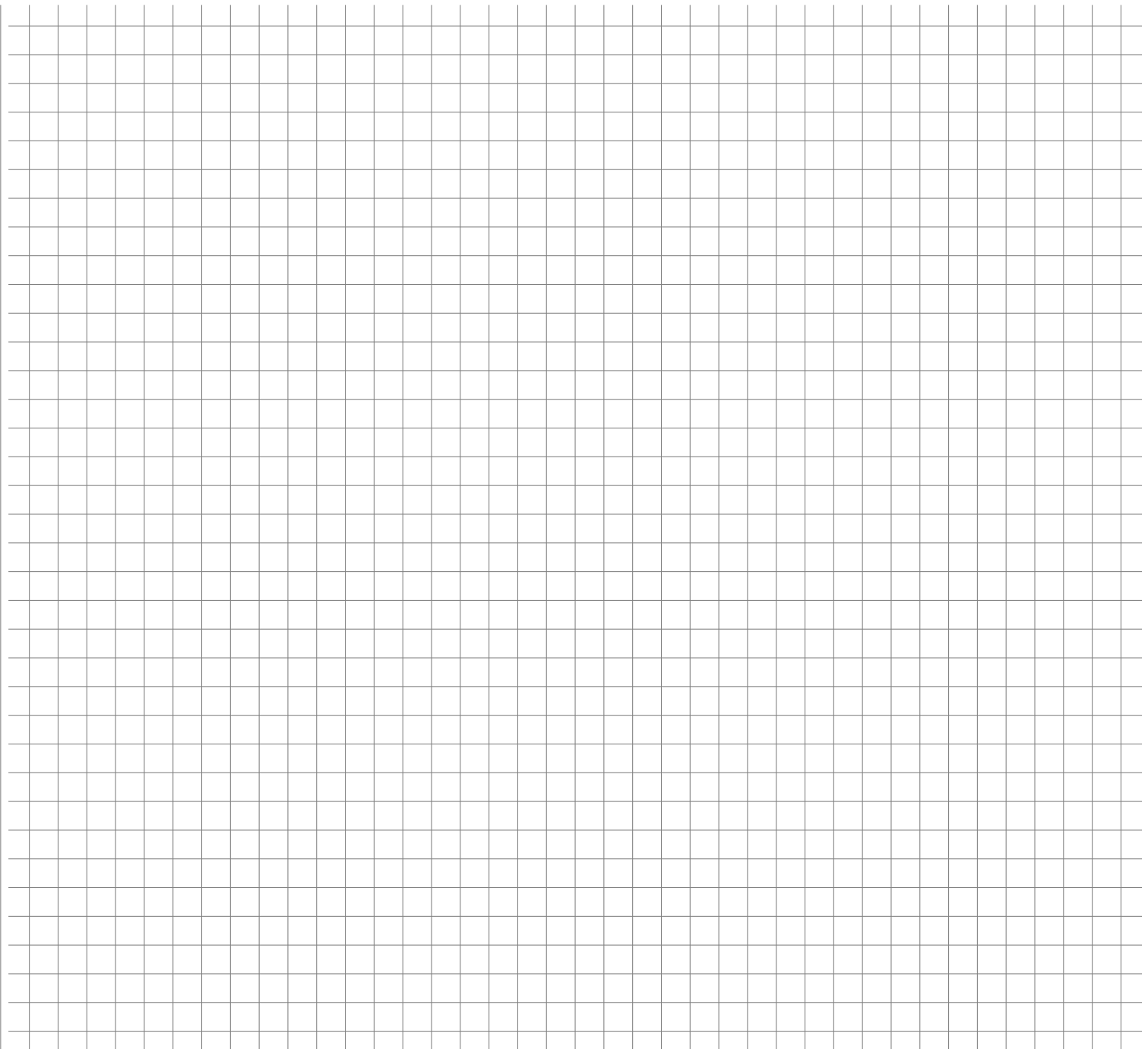
Aufgabe 8. (Kurven) [1+1+1+1+1(+2) = 5(+2) Punkte]

- (a) Geben Sie die Definition einer Kurve der Klasse C^1 an.
(b) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve der Klasse C^1 . Geben Sie eine Formel für die Länge der Kurve γ an.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b.$$

- (c) Bestimmen Sie $\gamma'(t)$.
(d) Begründen Sie, dass die Kurve γ eine Kurve der Klasse C^1 ist.
(e) Berechnen Sie die Länge der Kurve in Abhängigkeit von a und b .
(*f) **Bonusaufgabe:** Berechnen Sie die Krümmung der Kurve im Punkt $\gamma(t)$.



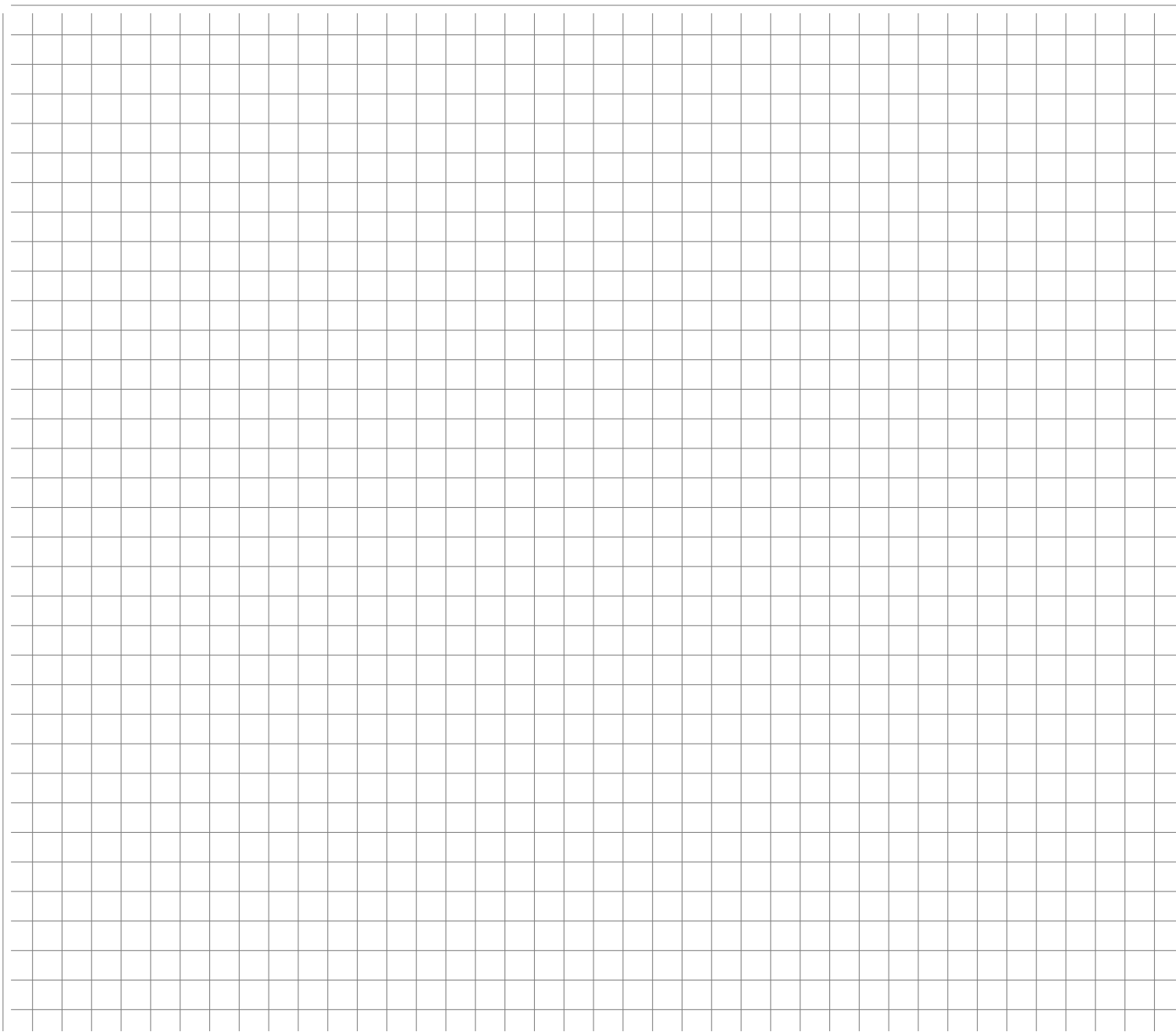


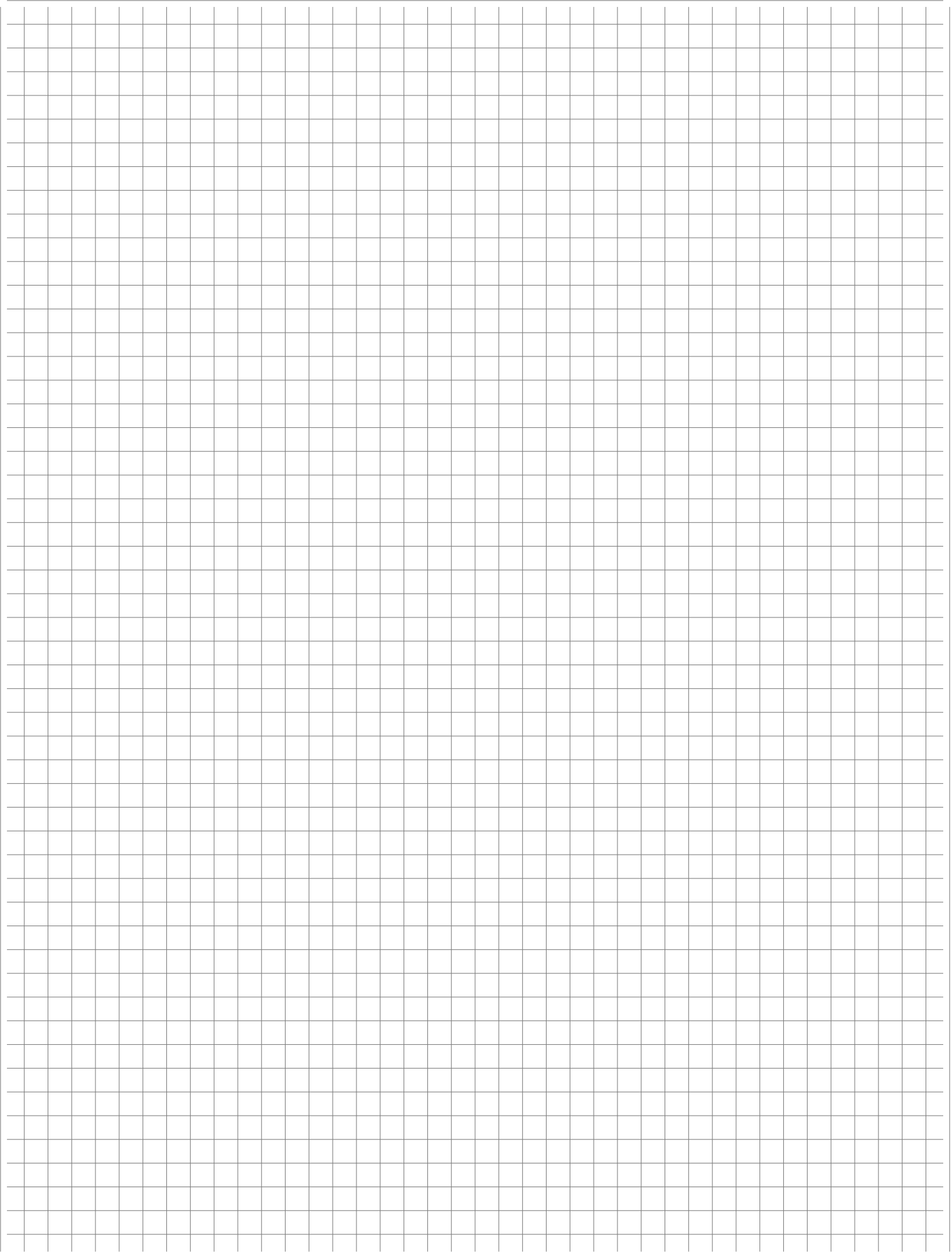
Aufgabe 9. (Matrizen) [4+3+1+5=13 Punkte]

- (a) Sei $A \in M^{n,n}(\mathbb{C})$. Geben Sie die Definition dafür an, dass A
- (i) diagonal ist;
 - (ii) normal ist;
 - (iii) unitär ist;
 - (iv) diagonalisierbar ist.
- (b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die Determinante, die Spur und das charakteristische Polynom von A .
- (c) Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist.
- (d) Bestimmen Sie eine unitäre Diagonalisierung von A .



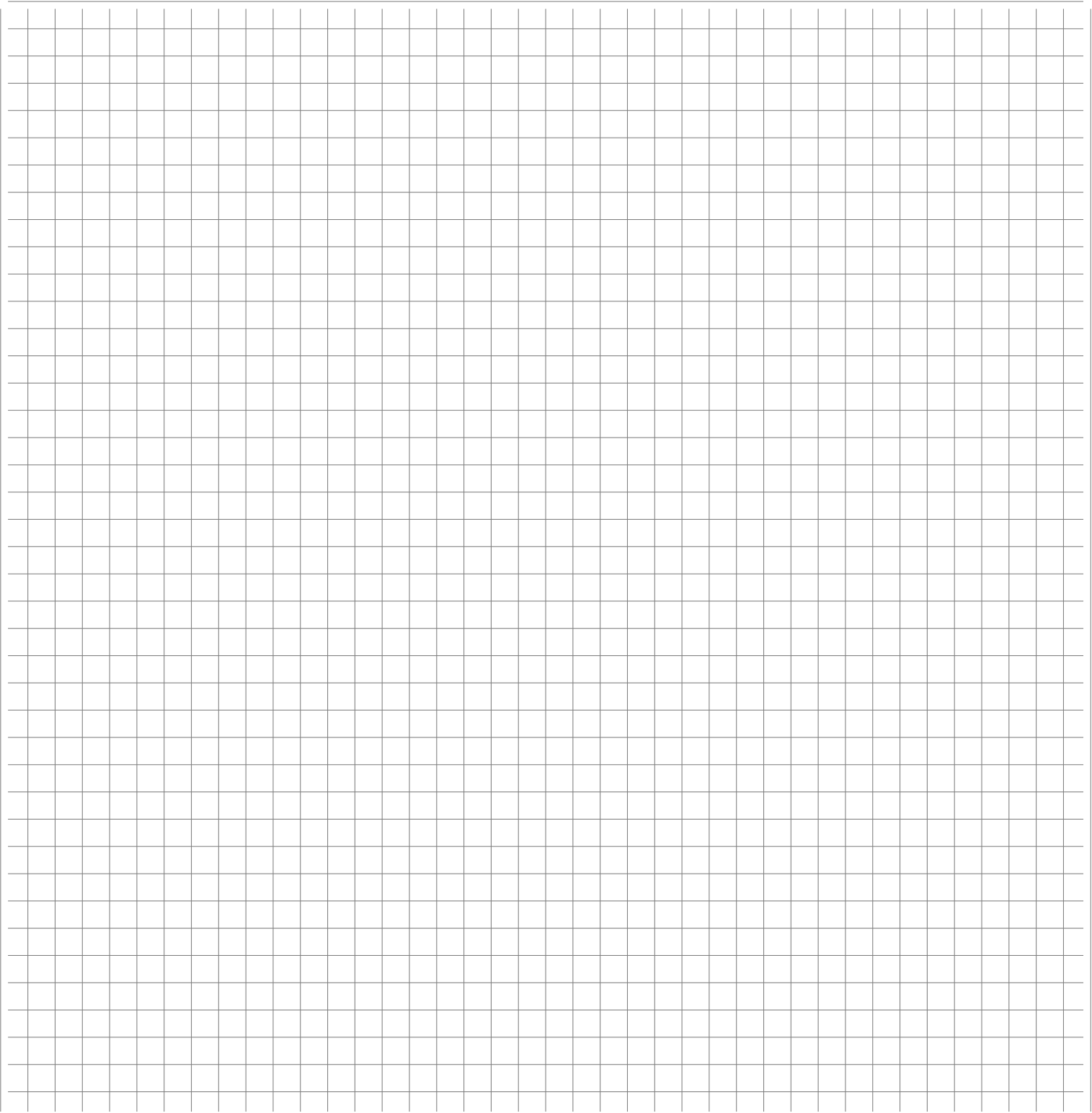


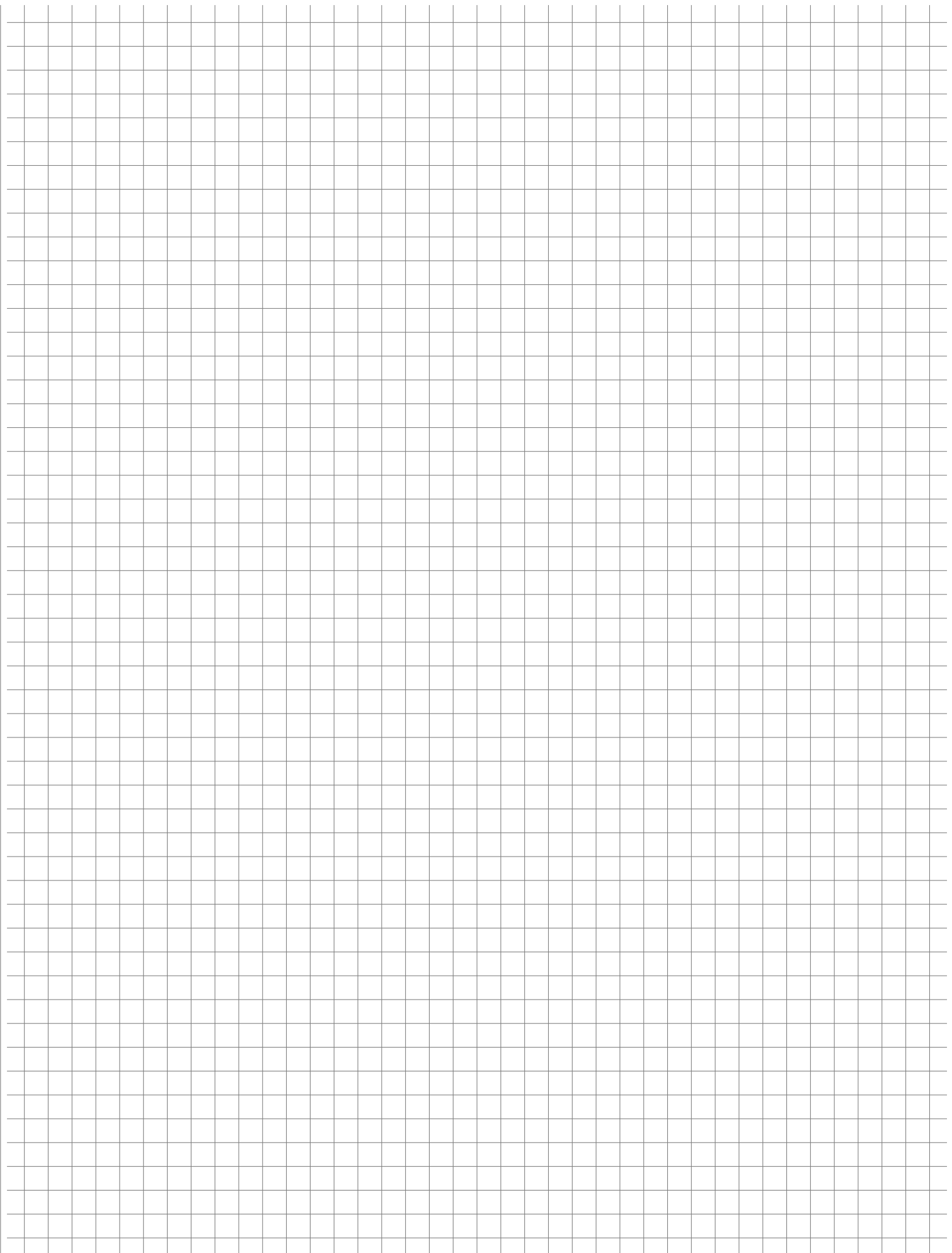
Aufgabe 10. (Lineare Gleichungssysteme) [4 Punkte]

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ \alpha x_1 & & & & - & x_3 & & = & 0 \\ (1 + \alpha)x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & & & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche α besitzt das lineare Gleichungssystem keine / genau eine / unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit des Parameters α .





Aufgabe 11. (Extrema) [2+1+2+3+3(+3)=11(+3) Punkte]

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

- (a) Geben Sie die Definition des Gradienten und der Hesse-Matrix von f an.
- (b) Geben Sie ein hinreichendes Kriterium dafür an, dass in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Minimum von f vorliegt.

Sei nun $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

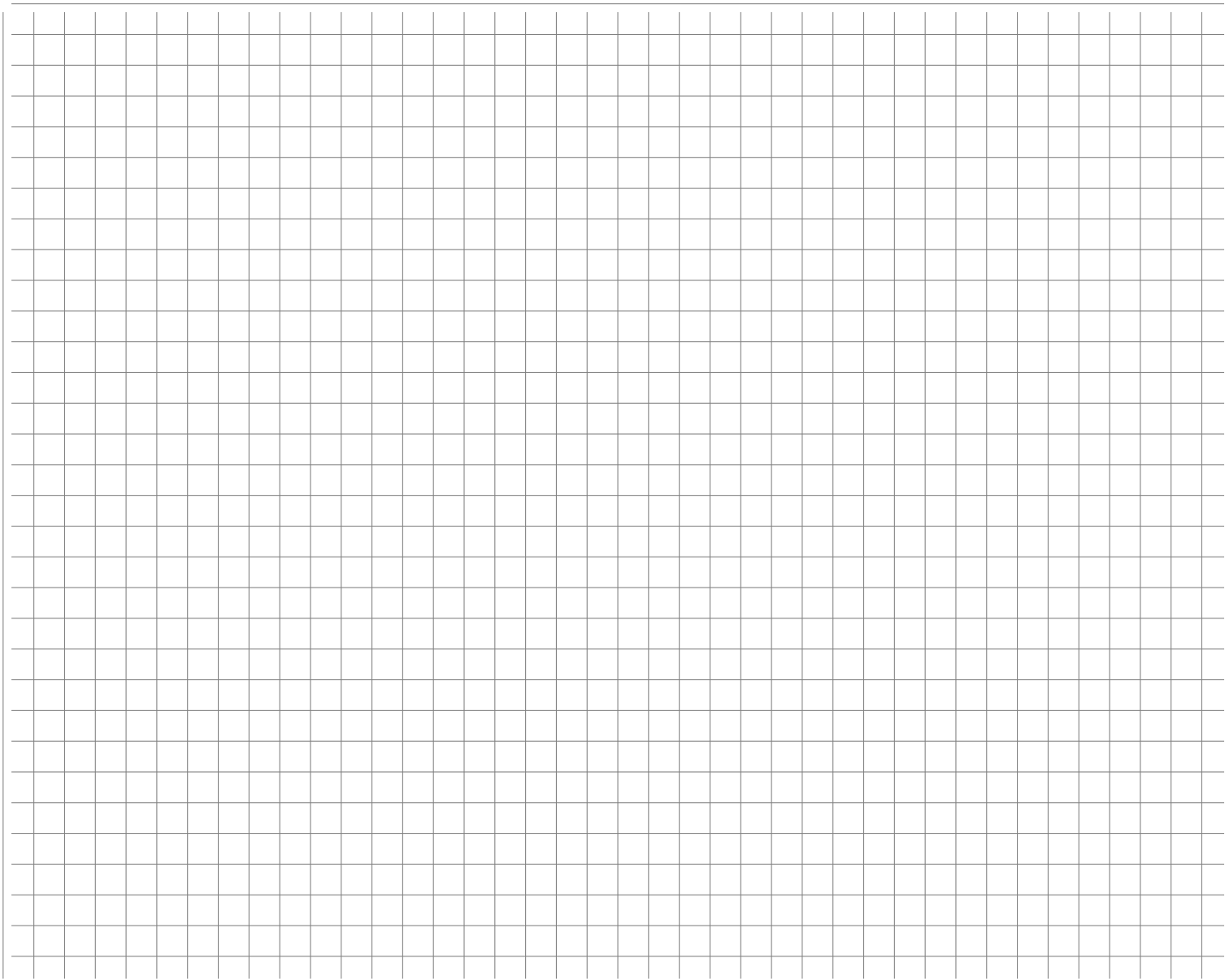
$$g(x, y) = (x + y^2 - y^3)e^x.$$

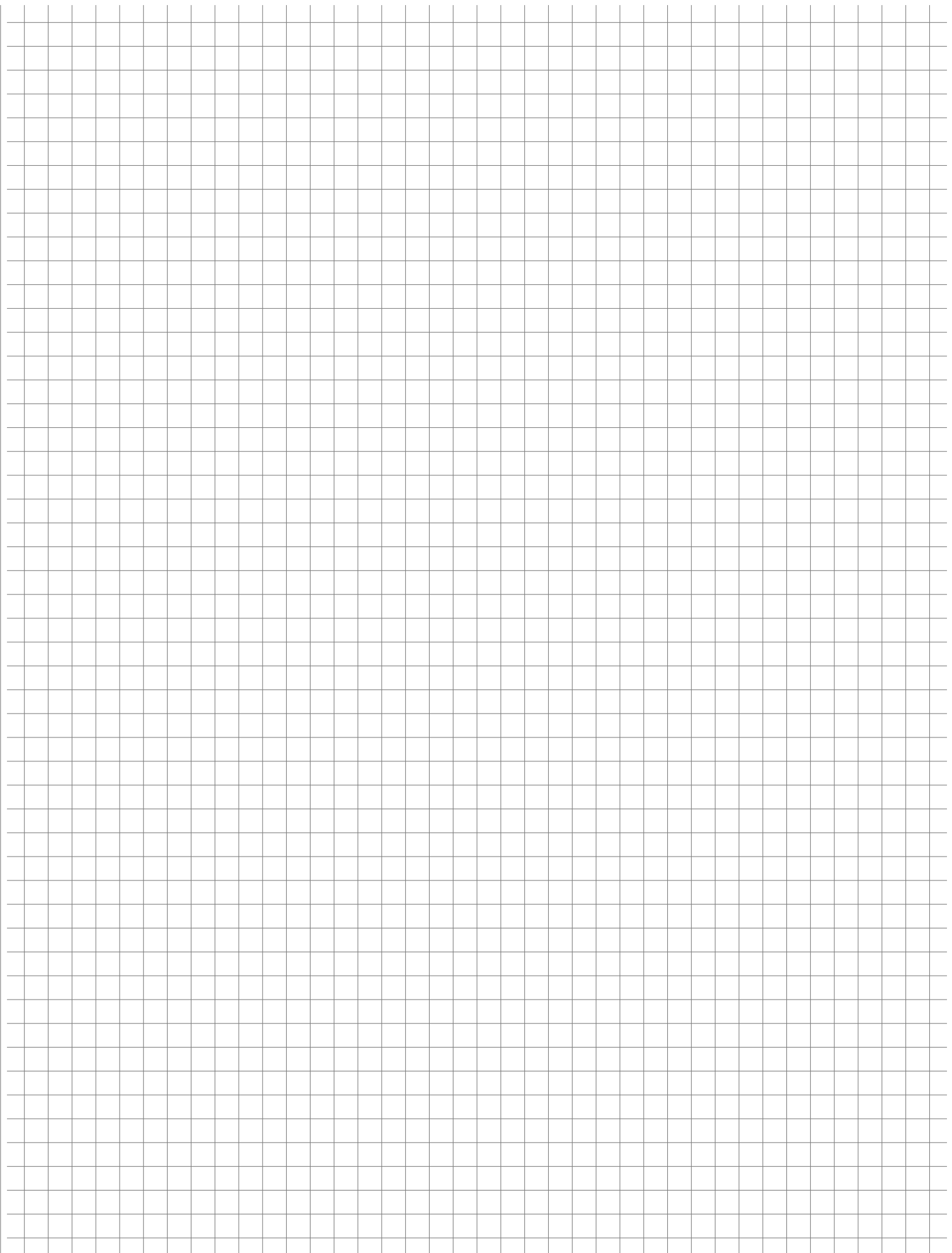
- (c) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von g .
- (d) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema von g .
- (e) Betrachten Sie g unter der Nebenbedingung

$$x + 1 = y.$$

Berechnen Sie Kandidaten für Extremstellen von g unter der Nebenbedingung mithilfe der Methode von Lagrange.

- (*f) **Bonusaufgabe:** Bestimmen Sie die Art der in Teilaufgabe (e) berechneten Extremstellen.





Zusätzliche Seiten zur Bearbeitung

Bitte machen Sie auf den folgenden Seiten kenntlich, welche Aufgabe Sie bearbeiten!

