Institut für Geometrie und Topologie
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Kimmerle

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **8. März 2004**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung **aer**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120** Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 20 eigenhändig beschriebene DIN A4–Blätter. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 und 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung separate Blätter.
- Bei den **Aufgaben 3 und 4** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein.
- Tragen Sie Ihren Namen und Matrikelnummer in die dafür vorgesehenen Kästen auf Seite 3 ein und legen Sie nur die Seiten 3 und 4 Ihrer Ausarbeitung bei.
- Die Prüfungsergebnisse werden spätestens ab dem 19. 04. 2004 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am 21. 04. 2004 statt.

  VIEL ERFOLG!!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, und bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 22. 04. 2004 in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte): Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \tag{1}$$

und

$$y^{(4)} - 2y''' - 2y'' + 8y = 0. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass es zwei linear unabhängige Funktionen y_1 und y_2 gibt, die sowohl Lösung der Gleichung (1) als auch der Gleichung (2) sind.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2).

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = -\frac{2e^{2x}}{x^3} \,, \quad (x > 0).$$

Hinweis: Aufgabenteil **c)** kann mittels Variation der Konstanten berechnet werden.

Aufgabe 2 (15 Punkte):

a) Bestimmen Sie die Polstellen der komplexen Funktion

$$f(z) = \frac{1 - z}{\left(z^2 + 1\right)^2}$$

sowie deren Vielfachheit.

b) Sei z_0 die Polstelle von f mit negativem Imaginärteil. Schreiben Sie $f(z)$ in der Form

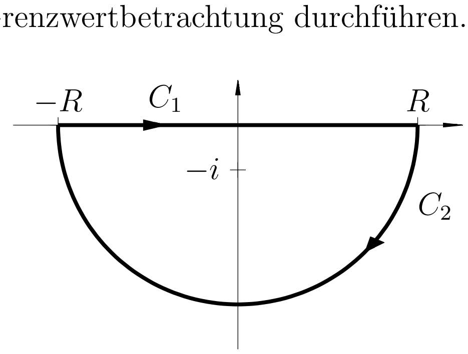
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2}$$

und berechnen Sie das Residuum der Funktion $f(z)$ im Punkt z_0.

c) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - x}{\left(x^2 + 1\right)^2} \, \mathrm{d}x \,,$$

indem Sie die Funktion $f(z)$ über den in der Abbildung dargestellten Weg integrieren und eine geeignete Grenzwertbetrachtung durchführen.



$(R > 3)$

Name: $\boxed{}$ **Mat.-Nr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 3 (20 Punkte): Im $\mathbb{R}^3$ sei der Körper M gegeben, der durch den Graph S der Funktion

$$x = f(y, z) = 1 + 4y^2 + 4z^2$$

und der Ebene E mit der Gleichung

$$x = 5$$

eingeschlossen wird. M ist also die Punktmenge

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + 4y^2 + 4z^2 \leq x \leq 5\right\} .$$

Die Kurve K sei gegeben durch $S \cap E$. Das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2z \\ 2y + z \\ 2x + y \end{pmatrix} .$$

a) Skizzieren Sie den Schnitt von M mit der (x, z)-Ebene.

b) Wie lauten die nach außen weisenden Normaleneinheitsvektoren N_1 bzw. N_2 von ∂M in $(5, 0, \frac{1}{2})$ bzw. $(2, 0, \frac{1}{2})$?

$$N_1 = \boxed{\quad (\quad , \quad , \quad)^t}, \quad N_2 = \boxed{\quad (\quad , \quad , \quad)^t}.$$

c) Eine Parametrisierung $v(t)$ von K lautet

$$v(t) = \boxed{(\quad , \quad , \quad)^t, \ t \in \quad}.$$

d) Verwenden Sie der Geometrie des Körpers angepasste Zylinderkoordinaten und ergänzen Sie die beiden Dreifach–Integrale so, dass sie das Volumen von M beschreiben (beachten Sie die jeweils vorgegebene Integrationsreihenfolge):

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}r$$

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\varphi$$

e) Das Volumen von M ist $\boxed{}$.

f) $\operatorname{rot} g = \boxed{\left(\quad , \quad , \quad \right)^t}$.

g) $\operatorname{div} g = \boxed{}$.

h) $\iint\limits_{\partial M} g \cdot n \, \mathrm{d}O = \boxed{}$.

(Hierbei sei n der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor.)

i) $\int\limits_K g \mathrm{d}x = \boxed{}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte):

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\underbrace{4xy - 1}_{p} + \underbrace{\frac{x}{y}}_{q} \, y' = 0 \ , \quad (y > 0) \ .$$

a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

$$p_x \cdot q = \boxed{} \qquad q_y = \boxed{} \qquad q_x - p_y = \boxed{}$$

b) Berechnen Sie einen von y abhängigen integrierenden Faktor μ und die zur Berechnung notwendige Differentialgleichung:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \boxed{} \qquad \mu(y) = \boxed{}$$

c) Berechnen Sie zu der exakten DGL eine Funktion F, so dass $F(x, y) = c$ implizite Lösungen der DGL sind.

$$F(x, y) = \boxed{}$$

d) Bestimmen Sie eine explizite Lösung y_{s}, welche durch den Punkt $P = (1, 1)$ geht.

$$y_{\mathrm{s}} = \boxed{}$$

e) Wie lautet die Steigung der Tangente in $Q = (2, 1)$ der Lösung, die durch Q geht?

$$\boxed{}$$