Institut für Geometrie und Topologie
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Kimmerle

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **9. März 2004**

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **autip, verf, wewi**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtung **aer**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120** Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 20 eigenhändig beschriebene DIN A4–Blätter. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 und 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung separate Blätter.
- Bei den **Aufgaben 3 und 4** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein.
- Tragen Sie Ihren Namen und Matrikelnummer in die dafür vorgesehenen Kästen auf Seite 3 ein und legen Sie nur die Seiten 3 und 4 Ihrer Ausarbeitung bei.
- Die Prüfungsergebnisse werden spätestens ab dem 19. 04. 2004 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am 21. 04. 2004 statt.

  Viel Erfolg!!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, und bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 22. 04. 2004 in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte): Der Körper K sei bestimmt durch

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\} .$$

a) Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der Ebene $y = 0$. Bestimmen Sie das Volumen V und die z-Koordinate des Schwerpunkts S von K.

(Hinweis: Es können Zylinderkoordinaten verwendet werden.)

b) Unterhalb von K soll ein Viertelzylinder Z_h gegeben durch

$$Z_h = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le x^2 + y^2 \le 9,\ -h \le z \le 0 \right\}$$

angebracht werden, so dass der Schwerpunkt von $K \cup Z_h$ in der (x, y)-Ebene liegt. Bestimmen Sie h.

Aufgabe 2 (15 Punkte):

a) Berechnen Sie alle zweimal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen $v = v(x)$ und $w = w(t)$, so dass

$$u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$$

eine nichttriviale Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{tt} + u_x = 0$$

ist (es genügt die Angabe von v und w).

b) Bestimmen Sie alle Lösungen $u(x, t)$ von Teilaufgabe a), die für alle x die Bedingungen

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 0$$

erfüllen.

Name: | | **Mat.-Nr.:** | |

Aufgabe 3 (13 Punkte): Gegeben sei in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{N}$ das Vektorfeld $g_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$g_a(x, y, z) = (z^a, -2zy\cos(y^a), 2zx - \sin(y^a))^t.$$

a) Berechnen Sie rot g_a:

$$\operatorname{rot} g_a = \boxed{\Big(\qquad , \qquad , \qquad \Big)^t}$$

b) Für welchen Wert des Parameters a besitzt das Vektorfeld g_a ein Potential ?

$$a = \boxed{\qquad}\,.$$

c) Bestimmen Sie eine zu diesem a gehörende Potentialfunktion u:

$$u = \boxed{\qquad}$$

d) Im $\mathbb{R}^3$ sei C der Halbkreis um $(2, 0, 0)$ mit Radius 1, der bei $(2, 0, 1)$ beginnt und über $(1, 0, 0)$ zu $(2, 0, -1)$ führt. Geben Sie eine Parameterdarstellung von C an:

$$C(t) = \boxed{\Big(\qquad , \qquad , \qquad \Big)^t,\ t \in \qquad}$$

e) Berechnen Sie $g_1\big(C(t)\big) \cdot C'(t)$

$$\boxed{\qquad}$$

f) Berechnen Sie $I_1 = \int_C g_1 \,\mathrm{d}x$ und $I_2 = \int_C g_2 \,\mathrm{d}x$

$$I_1 = \boxed{\qquad} \qquad I_2 = \boxed{\qquad}\,.$$

Hinweis: Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(t - \sin(t)\cos(t)\big) &= 2\sin^2(t) \\
\frac{d}{dt}\sin^2(t) &= 2\sin(t)\cos(t) \\
\frac{d}{dt}\cos^3(t) &= -3\sin(t)\cos^2(t)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (17 Punkte):

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. Geben Sie zu jedem Eigenwert λ zusätzlich die algebraische Vielfachheit e_λ und die geometrische Vielfachheit d_λ an.

c) Bestimmen Sie eine Jordan-Normalform J von A sowie eine Transformationsmatrix T mit $J = T^{-1}AT$.

$J = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ $\qquad$ $T = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

d) Gegeben sei das DGL-System $Y' = AY$. Durch Transformation erhält man das System $Z' = JZ$. Geben Sie die allgemeine Lösung Z des transformierten Systems an.

$Z =$

e) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung Y des DGL-Systems $Y' = AY$.

$Y =$

f) Bestimmen Sie die spezielle Lösung Y_s, für die $Y_\mathrm{s}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt.

$Y_\mathrm{s} =$