IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **8. 3. 2004**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **el**, **kyb**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle sechs Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 2–6** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **120 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 13. 4. 2004 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 14. 5. 2004 in Raum V57.8.162 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

a) Für jedes Vektorfeld $\vec{F}$ mit zweimal stetig partiell differenzierbaren Komponenten gilt $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) = \vec{0}$.

b) $\operatorname{grad} r^s = s r^{s-1}\vec{e}_r$ für positives s und $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

c) Die Differentialgleichung $u'' + u = \cos 2t$ besitzt genau eine reelle periodische Lösung.

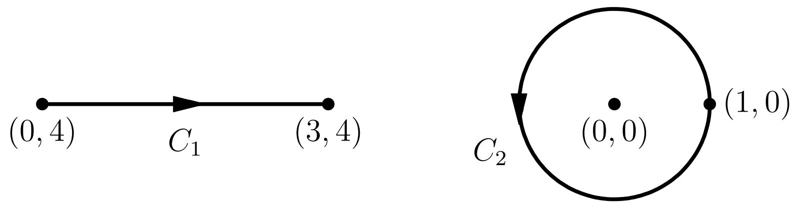
d) Jedes Vektorfeld besitzt ein Vektorpotential oder ein skalares Potential.

e) Die Laplace-Transformierte eines trigonometrischen Polynoms ist ein trigonometrisches Polynom.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y) = r^{\gamma}\,\vec{e}_r + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x + \beta y \end{pmatrix}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ \gamma > 0\,,$$

die Arbeitsintegrale $\displaystyle\int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ über die abgebildeten Wege.



Untersuchen Sie dazu zunächst, für welche Parameter α, β, γ ein Potential zu $\vec{F}$ existiert, und bestimmen Sie dieses.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y' = (2x-5)y, \quad y(3) = 1$ **b)** $y' = \dfrac{y^2}{x(2x-1)}, \quad y(1) = -1/2$

c) $y' = 2y + 5\sin x, \quad y(0) = 2$

Aufgabe 4 (10 Punkte): Auf dem Gebiet $D: \ 0 \le x \le 1,\ |y| \le \sinh x$, sei die Funktion $f(x,y) = \cosh x$ gegeben. Skizzieren Sie D und berechnen Sie

a) den Flächeninhalt des durch $z = f(x,y)$ definierten Flächenstücks S,

b) die Länge der Randkurve von S,

c) das Volumen zwischen D und S.

Hinweis: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation

a) $u' - u = \mathrm{e}^t \cos t, \quad u(0) = 0$ **b)** $u'' + u' = 1 - \mathrm{e}^{-t}, \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 2$

c) $u - 2\varphi \star u = 1, \quad \varphi(t) = \sin t$

Hinweis zu **b)**: Zeigen Sie, dass $U(s) = \dfrac{\alpha}{s^2} + \dfrac{\beta}{(s+1)^2}$, mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Gegeben sind das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^z \\ -x\mathrm{e}^z \\ \mathrm{e}^{z\varrho} \end{pmatrix}, \qquad \varrho = \sqrt{x^2+y^2}$$

und der Zylinder

$$K: \quad x^2 + y^2 \le a^2\,, \quad 0 \le z \le 1$$

mit der Oberfläche S. Berechnen Sie

a) $\operatorname{div} \vec{F}$,

b) den Fluss von $\vec{F}$ durch S nach außen,

c) den Fluss von $\operatorname{rot} \vec{F}$ durch S nach außen.
