IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

**Höhere Mathematik I–III** **Diplomvorprüfung** **9. 3. 2004**

# 2. Klausur

für Studierende der Fachrichtung **phys**

**Bitte unbedingt beachten:**

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 180 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle zehn Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 3–6** und **8–10** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **180 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 13. 4. 2004 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

**Hinweise für Wiederholer:**

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 14. 5. 2004 in Raum V57.8.162 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

---

**Aufgabe 1** (5 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

**a)** $\vec{a} \,||\, \vec{c} \;\Rightarrow\; (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \perp \vec{a}$ für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2)!}{n^n} = 0$.

**c)** $\dfrac{d}{dx} \ln|23x| = \dfrac{d}{dx} \ln|7x|$ für $x \neq 0$.

**d)** $\det(A + B) = \det A + \det B$ für beliebige quadratische $(n \times n)$-Matrizen.

**e)** Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Gilt $\operatorname{grad}(fg)|_{(x,y)} = 0$, dann besitzt $f$ oder $g$ einen kritischen Punkt an der Stelle $(x, y)$.

---

**Aufgabe 2** (5 Punkte): Berechnen Sie (Angabe des Ergebnisses genügt):

**a)** $\displaystyle\int_0^{4\pi} \cos^{13} x \sin^3 x \, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \, dx$ **c)** $\displaystyle\frac{d}{dx} \sqrt[x]{2}\,, \quad x > 0$

**Aufgabe 3** (10 Punkte): Gegeben seien der Punkt $P = (3, 2, 1)$ und die Gerade

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**a)** Berechnen Sie den Abstand von $g$ zu $P$ und den Abstand von $g$ zur $x$-Achse.

**b)** Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene $E$ durch $P$ und $g$.

**c)** Unter welchem Winkel schneidet $E$ die $yz$-Ebene?

**Aufgabe 4** (10 Punkte): Berechnen Sie

**a)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 x^2 (\ln x)^3 \, dx$ **c)** $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

*Hinweis:* Ohne Herleitung dürfen nur die Stammfunktionen von $(x-a)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{e}^x$ und $\ln x$ benutzt werden. Verwenden Sie bei **c)** die Substitution $x = \tan u$.

**Aufgabe 5** (10 Punkte): Gegeben sei die von dem reellen Parameter $\alpha$ abhängige Funktion

$$f(x) = (x-\alpha)\sqrt{\sin x}\,.$$

**a)** Durch $0 \le y \le |f(x)|$ mit $0 \le x \le \pi$ wird eine Fläche begrenzt. Berechnen Sie das Volumen $V(\alpha)$ des Körpers, der durch Rotation dieser Fläche um die $x$-Achse entsteht.

**b)** Bestimmen Sie das Minimum und Maximum von $V(\alpha)$ für $\alpha \in [0, \pi]$.

**Aufgabe 6** (10 Punkte): Bestimmen Sie das quadratische Taylor-Polynom $p(x, y)$ der Funktion

$$f(x, y) = \exp\left(\frac{x}{2+y}\right)$$

zum Entwicklungspunkt $(0, 0)$. Welche geometrische Form haben die Niveaulinien $p(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$?

*Hinweis:* Beachten Sie den Sonderfall $c = 1$.

**Aufgabe 7** (10 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

**a)** $\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}(U^2) = U\,\mathrm{grad}\,U$, für alle stetig differenzierbaren Skalarfelder $U$.

**b)** Die Differentialgleichung $xy' + y^3 = 0$ ist exakt.

**c)** Das Differentialgleichungssystem $u' = \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 13 & 11 \end{pmatrix} u$ ist im Ursprung $(0,0)^{\mathrm{t}}$ stabil.

**d)** $\mathrm{grad}\,u(x,y,z) = (y,z,x)^{\mathrm{t}} \implies \Delta u = 0$, für zweimal stetig differenzierbares $u$.

**e)** $\mathrm{rot}\,(\vec{F} \times \vec{G}\,) = (\mathrm{rot}\,\vec{F}\,) \times (\mathrm{rot}\,\vec{G}\,)$, für alle stetig differenzierbaren Vektorfelder $\vec{F}$, $\vec{G}$.

---

**Aufgabe 8** (10 Punkte): Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $u'' + 6u' + 25u = f(t)$

**a)** die allgemeine reelle Lösung $u_h$ der homogenen Gleichung ($f(t) = 0$),

**b)** die periodische Lösung $u_p$ für $f(t) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\omega t}$, $\omega > 0$, sowie deren Realteil $\mathrm{Re}\,u_p$,

**c)** die Resonanzfrequenz $\omega_*$, für die der Betrag der komplexen Amplitude $|u_p|$ maximal wird.

---

**Aufgabe 9** (10 Punkte): Gegeben sind die Halbkugelschale $S : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,,\ x^2 + y^2 \leq 1\,,$ und das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = (0, 1, y^2)^{\mathrm{t}}.$$

Konstruieren Sie zu $\vec{F}$ ein Vektorpotential der Form $\vec{A} = (U(y,z), 0, 0)^{\mathrm{t}}$ und berechnen Sie

$$\left| \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \right| \qquad \text{und} \qquad \left| \iint\limits_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \right| .$$

*Hinweis:* $\sin^4 t = \sin^2 t - \frac{1}{4}\sin^2 2t$.

---

**Aufgabe 10** (10 Punkte): Es sei

$$f(x) = \cosh x\,, \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi), \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

**a)** Zeigen Sie, dass die komplexen Fourier–Koeffizienten von $f$ die Form

$$c_k = \frac{\alpha\,(-1)^k}{1 + k^2}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

haben, und bestimmen Sie die Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$.

**b)** Geben Sie die reellen Fourier–Koeffizienten $a_k, b_k$ von $f$ an.

**c)** Berechnen Sie mit Hilfe von **a)** den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)^2}$.

*Hinweis:* $\displaystyle\int \cosh^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sinh 2x}{4} + c$

---