Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **9. 3. 2004**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **el**, **kyb**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle sechs Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 2–6** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **120 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 13. 4. 2004 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 14. 5. 2004 in Raum V57.8.162 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

a) $\frac{1}{2}\operatorname{grad}(U^2) = U \operatorname{grad} U$, für alle stetig differenzierbaren Skalarfelder U.

b) Die Differentialgleichung $xy' + y^3 = 0$ ist exakt.

c) Das Differentialgleichungssystem $u' = \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 13 & 11 \end{pmatrix} u$ ist im Ursprung $(0,0)^{\mathrm{t}}$ stabil.

d) $\operatorname{grad} u(x,y,z) = (y,z,x)^{\mathrm{t}} \implies \Delta u = 0$, für zweimal stetig differenzierbares u.

e) $\operatorname{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = (\operatorname{rot}\vec{F}) \times (\operatorname{rot}\vec{G})$, für alle stetig differenzierbaren Vektorfelder $\vec{F}$, $\vec{G}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Bestimmen Sie den Stabilitätstyp (z.B. instabiler Knoten, neutrales Zentrum,...) des Differentialgleichungssystems

$$u' = \begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} u$$

im Ursprung $(0,0)^{\mathrm{t}}$ in Abhängigkeit von dem reellen Parameter α mit $|\alpha| \neq \sqrt{3}$.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $\alpha = 2$ und geben Sie alle Anfangswerte $u(0)$ an, für die $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = (0,0)^{\mathrm{t}}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $u'' + 6u' + 25u = f(t)$

a) die allgemeine reelle Lösung u_h der homogenen Gleichung ($f(t) = 0$),

b) die periodische Lösung u_p für $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, $\omega > 0$, sowie deren Realteil $\operatorname{Re} u_p$,

c) die Resonanzfrequenz ω_*, für die der Betrag der komplexen Amplitude $|u_p|$ maximal wird.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Gegeben sind die Halbkugelschale $S : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, und das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = (0, 1, y^2)^{\mathrm{t}}.$$

Konstruieren Sie zu $\vec{F}$ ein Vektorpotential der Form $\vec{A} = (U(y,z), 0, 0)^{\mathrm{t}}$ und berechnen Sie

$$\left| \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \right| \qquad \text{und} \qquad \left| \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \right| .$$

Hinweis: $\sin^4 t = \sin^2 t - \frac{1}{4} \sin^2 2t$.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Berechnen Sie für den Zylinder

$$K : \quad \varrho^2 = x^2 + y^2 \leq 1 \, , \quad 0 \leq z \leq h$$

und das Skalarfeld $U(x,y,z) = z/(1+\varrho^2)$

$$I = \iiint_K \Delta U \, dK \qquad \text{sowie} \qquad \vec{J} = \iiint_K U \operatorname{grad} U \, dK \, ,$$

indem Sie beide Integrale als Oberflächenintegrale schreiben und dann die einzelnen Anteile von Boden-, Mantel- und Deckfläche berechnen. Verifizieren Sie zuerst, dass

$$\operatorname{grad} U = \frac{\alpha \varrho z}{(1+\varrho^2)^2} \vec{e}_\varrho + \frac{\beta}{1+\varrho^2} \vec{e}_z \, ,$$

und bestimmen Sie die reellen Konstanten α und β.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Es sei

$$f(x) = \cosh x\,, \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi), \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die komplexen Fourier–Koeffizienten von f die Form

$$c_k = \frac{\alpha\,(-1)^k}{1+k^2}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

haben, und bestimmen Sie die Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Geben Sie die reellen Fourier–Koeffizienten a_k, b_k von f an.

c) Berechnen Sie mit Hilfe von **a)** den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)^2}\,.$

Hinweis: $\displaystyle\int \cosh^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sinh 2x}{4} + c$