IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik I–III **Diplomvorprüfung** **6. 9. 2004**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung **phys**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 180 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle zehn Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 3–6** und **8–10** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **180 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 11. 10. 2004 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 12. 11. 2004 in Raum V57.8.162 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

a) $|\vec{a}\times\vec{b}\,|^2 + |\vec{a}\cdot\vec{b}\,|^2 = |\vec{a}\,|^2\,|\vec{b}\,|^2$, für beliebige Vektoren $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$.

b) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-1/x^2}\,dx$ existiert.

c) $\det(AB)\neq 0 \implies A$ und B sind invertierbar, für alle Matrizen $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

d) Die Gleichung $x^{\mathrm{i}}=2$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, besitzt keine reelle Lösung x.

e) $x^2+10xy+y^2=1$ beschreibt eine Hyperbel.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Berechnen Sie (Angabe des Ergebnisses genügt):

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/\ln x}$ **b)** $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(xt)}{t}\,dt$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n\, 3^{-|n|}$

Aufgabe 3 (10 Punkte):

a) Berechnen Sie für

$$z = \frac{8\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}}{(\mathrm{i}-1)^5} + \sqrt{2}$$

die Werte $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ und $\arg z \in [0, 2\pi)$.

b) Skizzieren Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$(z - 2\mathrm{i})\operatorname{Im} z - \overline{z} = z^2 + |z|^2\,, \qquad z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}\,,$$

in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Stellen Sie jede der durch die folgenden Taylor–Reihen definierten Funktionen $f(x)$ in geschlossener Form dar und bestimmen Sie ihr Konvergenzintervall.

a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+1)!}$ **b)** $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{1-2n}\, x^{1+2n}$ **c)** $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^{n-1}$

Aufgabe 5 (10 Punkte): Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ stellt die Quadrik

$$Q_\alpha : \quad 2x^2 + \alpha z^2 - 2\sqrt{3}\,xy = 0$$

einen Kreiskegel dar? Welche geometrischen Objekte entstehen durch Schnitt von Q_3 mit den Ebenen $E_1 : x = 1$, $E_2 : y = 1$ und $E_3 : z = 1$?

Hinweis: Ein Kreiskegel besitzt die Normalform $\lambda\tilde{x}^2 + \lambda\tilde{y}^2 = \varrho\tilde{z}^2$, $\lambda, \varrho > 0$.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Bestimmen Sie mit Hilfe Lagrangescher Multiplikatoren die globalen Extrema von

$$f(x, y) = x^3 y$$

auf dem Kreis $K : x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 7 (10 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

a) Das Integral $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{1+r^2}\,,\ \ r=\sqrt{x^2+y^2}\,,$ existiert.

b) Für die Laplace–Transformierte $U(s)$ eines Polynoms gilt $\lim\limits_{s\to\infty} U(s)=0$.

c) Für stetiges $f(r)$ besitzt das Vektorfeld $f(r)\,\vec{e}_r\,,\ \ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,$ ein Potential.

d) Alle Lösungen $u(t)$ von $u''+10u'+100u=1$ besitzen denselben Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$.

e) $\vec{F}(x,y,z)=(z,0,x)^{\mathrm{t}}$ besitzt ein skalares Potential und ein Vektorpotential.

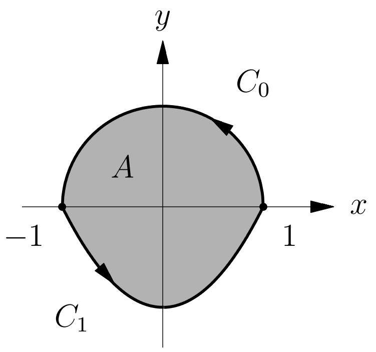
Aufgabe 8 (10 Punkte): Berechnen Sie Divergenz und Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y)=(\,x+2y\,,\,3x+4y\,)^{\mathrm{t}}$$

sowie die Integrale

$$\int\limits_{C_k}\vec{F}\cdot d\vec{r}\qquad\text{und}\qquad\int\limits_{C_k}\vec{F}\times d\vec{r}$$

über die abgebildeten Wege $C_k,\ k\in\{0,1\}$.

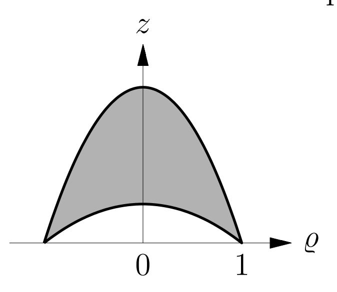


$C_0: x^2+y^2=1,\quad y\ge 0$ (Halbkreis)

$C_1: y=x^2-1,\quad |x|\le 1$ (Parabelsegment)

Hinweis: area $A=\pi/2+4/3$

Aufgabe 9 (10 Punkte): Berechnen Sie die Masse, den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment bzgl. der z–Achse für den Körper



$K:\ 1-\varrho^2\le z\le 4-4\varrho^2\,,$

mit $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}\le 1$ und Dichte 1.

Aufgabe 10 (10 Punkte): Lösen Sie mit Hilfe der Laplace–Transformation:

a) $u'+u-1=-2\mathrm{e}^{-t}\cosh t,\quad u(0)=1$ **b)** $u''+u=-t,\quad u(0)=0,\ u'(0)=1$

c) $3\displaystyle\int_0^t u(r)\,dr-tu(t)=0,\quad u(1)=2$

Hinweis zu **b)**: Zeigen Sie, dass $U(s)=\alpha/s^2+\beta/(s^2+1)$.
