IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **6. 9. 2004**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **el**, **kyb**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle sechs Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 2–6** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **120 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 11. 10. 2004 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 12. 11. 2004 in Raum V57.8.162 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

a) Das Integral $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{1+r^2}\,,\ \ r=\sqrt{x^2+y^2}\,,$ existiert.

b) Für die Laplace–Transformierte $U(s)$ eines Polynoms gilt $\lim\limits_{s\to\infty} U(s)=0$.

c) Für stetiges $f(r)$ besitzt das Vektorfeld $f(r)\,\vec{e}_r\,,\ \ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,$ ein Potential.

d) Alle Lösungen $u(t)$ von $u''+10u'+100u=1$ besitzen denselben Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$.

e) $\vec{F}(x,y,z)=(z,0,x)^{\mathrm{t}}$ besitzt ein skalares Potential und ein Vektorpotential.

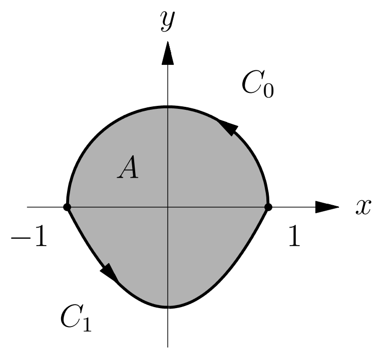
Aufgabe 2 (10 Punkte): Berechnen Sie Divergenz und Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y) = (\, x + 2y \,,\, 3x + 4y \,)^{\mathrm{t}}$$

sowie die Integrale

$$\int\limits_{C_k} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{C_k} \vec{F} \times d\vec{r}$$

über die abgebildeten Wege $C_k,\ k \in \{0, 1\}$.



$C_0 : x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0$ (Halbkreis)

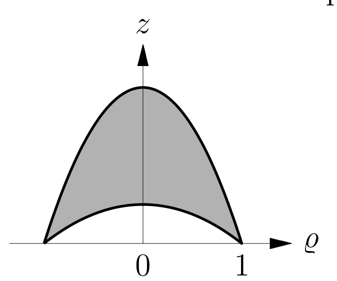
$C_1 : y = x^2 - 1, \quad |x| \leq 1$ (Parabelsegment)

Hinweis: area $A = \pi/2 + 4/3$

Aufgabe 3 (10 Punkte): Bestimmen Sie für jedes der folgenden Anfangswertprobleme die Lösung $y(x)$:

a) $2y' + y = xy^3\,, \quad y(0) = 1$ **b)** $(x+1)dy + (y+2x)dx = 0\,, \quad y(0) = 2$

Aufgabe 4 (10 Punkte): Berechnen Sie die Masse, den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment bzgl. der z–Achse für den Körper



$K: \ 1 - \varrho^2 \leq z \leq 4 - 4\varrho^2\,,$

mit $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ und Dichte 1.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Lösen Sie mit Hilfe der Laplace–Transformation:

a) $u' + u - 1 = -2\mathrm{e}^{-t} \cosh t, \quad u(0) = 1$ **b)** $u'' + u = -t, \quad u(0) = 0, \ u'(0) = 1$

c) $3 \displaystyle\int_0^t u(r)\, dr - tu(t) = 0, \quad u(1) = 2$

Hinweis zu **b)**: Zeigen Sie, dass $U(s) = \alpha/s^2 + \beta/(s^2+1)$.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Bestimmen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = (\,8x^3 - y^3\,,\,0\,,\,-3z\,)^{\mathrm{t}}$$

und den durch die Flächen

$$S:\ \varrho = \mathrm{e}^z\,,\ 0 \le z \le 1\,, \qquad S_0:\ \varrho \le 1\,,\ z = 0 \qquad \text{und} \qquad S_1:\ \varrho \le \mathrm{e}\,,\ z = 1$$

begrenzten axialsymmetrischen Körper K

a) das Volumen $\operatorname{vol} K$,

b) das Volumenintegral $\displaystyle\iiint\limits_K \operatorname{div}\vec{F}\,dK$,

c) den Fluss $\displaystyle\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ durch S nach außen.