IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **7. 9. 2004**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **el**, **kyb**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle sechs Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 2–6** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **120 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 11. 10. 2004 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 12. 11. 2004 in Raum V57.8.162 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

a) Das Differentialgleichungssystem $u' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{1000} \end{pmatrix} u$ besitzt Lösungen $u(t)$, die für $t \longrightarrow \infty$ unbeschränkt sind.

b) Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{F}$, das außerhalb einer Kugel Null ist, gilt $\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \vec{F} = 0$.

c) Das Arbeitsintegral eines stetigen radialsymmetrischen Feldes $f(r)\vec{e}_r$ über jeden geschlossenen Weg ist Null.

d) Für die komplexen Fourier–Koeffizienten c_k von $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$ gilt $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \mathrm{e}^2$.

e) Ist $\hat{f}$ stetig und Null außerhalb von $[-\pi, \pi]$, so verschwindet f bei allen ganzen Zahlen.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Bestimmen Sie für das Differentialgleichungssystem

$$u' = Au\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) die Eigenwerte und Eigenvektoren von A,

b) die allgemeine Lösung $u(t) = \big(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\big)^{\mathrm{t}}$,

c) die Lösung mit $u(0) = (1, 0, 0)^{\mathrm{t}}$.

Ist das System im Ursprung stabil?

Aufgabe 3 (10 Punkte): Gegeben sei die von dem reellen Parameter α abhängige Differentialgleichung

$$u'' - (1+\alpha)u' + \alpha u = f(t)\ .$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ($f(t) = 0$) in Abhängigkeit von α.

b) Berechnen Sie im Fall $\alpha = 0$ die allgemeine Lösung für $f(t) = 4\cos t$. Für welche Anfangswerte von $u(0)$ und $u'(0)$ ist diese Lösung auf $[0, \infty)$ beschränkt?

Aufgabe 4 (10 Punkte): Bestimmen Sie für das Vektorfeld $\vec{F} = (-2z, x, 0)^{\mathrm{t}}$ ein Vektorpotential der Form $\vec{A} = \big(u(x,y,z), v(x,y,z), 0\big)^{\mathrm{t}}$, das für $z = 0$ verschwindet, und berechnen Sie für das Rechteck S mit den Randsegmenten C_k,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

die Integrale

$$I_k = \int\limits_{C_k} \vec{A} \cdot d\vec{r}, \quad \text{für } k = 1, \ldots, 4\,, \qquad I = \left| \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \right|, \qquad \tilde{I} = \left| \iint\limits_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right|.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte): Für den Standard-Tetraeder

$$V: \quad x, y, z \geq 0\,, \qquad x + y + z \leq 1\,,$$

bezeichne $d\vec{S}$ das nach außen gerichtete Flächenelement von $S = \partial V$. Berechnen Sie für

$$U(x, y, z) = \mathrm{e}^{x+y+z}\,, \qquad W(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

die Integrale

$$I_1 = \iiint\limits_V U \Delta W \; dV\,, \quad I_2 = \iint\limits_S U \operatorname{grad} W \cdot d\vec{S}\,, \quad I_3 = \iiint\limits_V \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W \; dV\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\operatorname{grad} W \perp d\vec{S}_k$ für die Randdreiecke S_k, welche den Ursprung enthalten.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2\,, & \text{für } |x| \leq 1/2 \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier–Transformation von f,

$$\hat{f}(y) = \frac{2\mathrm{i}}{y^2}\,(y \cos y - \sin y)\,,$$

die Fourier–Transformationen von g' und g.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(y)|^2\, dy$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(y)\, dy\,.$