Höhere Mathematik III Diplomvorprüfung 6. September 2004

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung **aer**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 20 eigenhändig beschriebene DIN A4–Blätter. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 und 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter.
- Bei den **Aufgaben 3 und 4** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein.
- Tragen Sie Ihren Namen und Matrikelnummer in die dafür vorgesehenen Kästen auf Seite 3 ein und legen Sie nur die Seiten 3 und 4 Ihrer Ausarbeitung bei.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **12. 10. 2004** im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am **20. 10. 2004** statt.

  Viel Erfolg!!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben und bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum **21. 10. 2004** in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1: (15 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \\ x & \text{für} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases} ,$$

die 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird.

a) Skizzieren Sie die Funktion, bestimmen Sie eventuell vorhandene Symmetrien von f und ermitteln Sie ihre Fourier-Reihe $F(x)$.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $F(x)$ gegen $f(x)$? Berechnen Sie die Summe der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} ,$$

indem Sie die Funktion aus **a)** an einer geeigneten Stelle auswerten.

c) Gegeben sei

$$g(x) = \begin{cases} -x - \pi & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{für} \quad x = 0 \\ x & \text{für} \quad 0 < x \le \pi \end{cases} .$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe $G(x)$ von $g(x)$ nicht gegen $g(x)$? Wogegen konvergiert sie in diesen Punkten?

Aufgabe 2: (15 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Polstellen der komplexen Funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

sowie deren Vielfachheit.

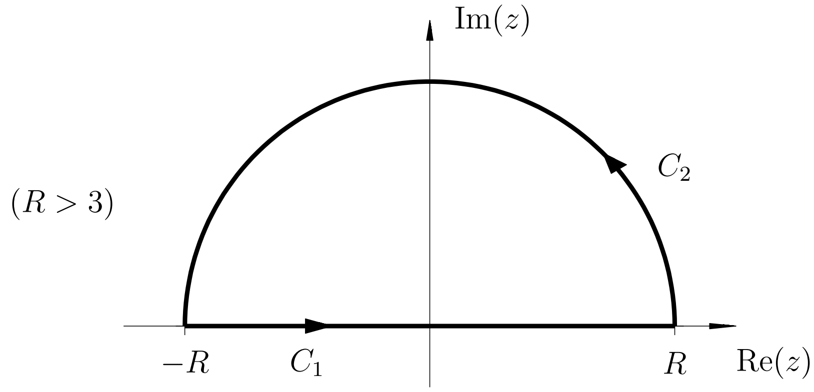
b) Berechnen Sie in allen Polstellen z_n mit positivem Imaginärteil das Residuum der Funktion $f(z)$. Schreiben Sie $f(z)$ hierzu in der Form

$$f(z) = \frac{g_n(z)}{(z - z_n)} .$$

c) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)} \, \mathrm{d}x ,$$

indem Sie die Funktion $f(z)$ über den in der Abbildung dargestellten Weg integrieren und eine geeignete Grenzwertbetrachtung durchführen.

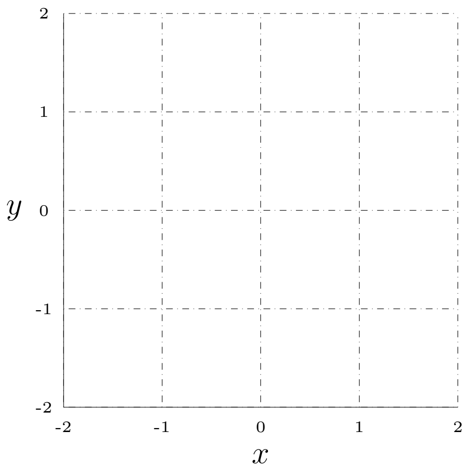


Name: **Matrikel–Nr.:**

Aufgabe 3: (15 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y)(y + y^2)\ .$$

Skizzieren Sie im vorgegebenen Ausschnitt der xy-Ebene die Kurven mit $f(x,y) = 0$ und geben Sie an, wo $f(x,y) > 0$ (Markierung mit +) oder $f(x,y) < 0$ (Markierung mit -) ist.



Berechnen Sie f_x und f_y.

$f_x =$

$f_y =$

Tragen Sie in die unten stehende Tabelle alle kritischen Punkte von f (also alle Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$) ein und kreuzen Sie deren Typ an. (Lassen Sie nicht benötigte Spalten leer.)

Punkt							
lokales Minimum							
lokales Maximum							
Sattelpunkt							

Bestimmen Sie innerhalb des Quadrats $-1 \leq x, y \leq 1$ den maximalen bzw. den minimalen Wert von f.

minimaler Funktionswert =   maximaler Funktionswert =

Aufgabe 4: (15 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Das charakteristische Polynom von A lautet $\boxed{}$.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit ihrer algebraischen Vielfachheit e_λ und geometrischen Vielfachheit d_λ. (*Hinweis:* Alle Eigenwerte sind ganzzahlig.)

$$\boxed{}$$

c) Bestimmen Sie eine Jordan-Normalform J von A, sowie eine Transformationsmatrix T, mit $J = T^{-1}AT$.

$$J = \boxed{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}} \qquad T = \boxed{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}$$

d) Gegeben sei das DGL-System $Y' = AY$. Durch Transformation erhält man das System $Z' = JZ$. Geben Sie die allgemeine Lösung Z_{allg} des transformierten Systems an.

$$Z_{\text{allg}} = \boxed{}$$

e) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung Y_{allg} des DGL-Systems.

$$Y_{\text{allg}} = \boxed{}$$

f) Gegeben sei ein weiteres DGL-System $Y' = BY$. Sei

$$Y_{\text{allg}} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Geben Sie eine Matrix B an, so dass Y_{allg} die allgemeine Lösung des DGL-Systems ist.

$$B = \boxed{\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}$$