Institut für Geometrie und Topologie
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Kimmerle

Höhere Mathematik III   Diplomvorprüfung   7. September 2004

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **autip verf wewi**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtung **aer**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 20 eigenhändig beschriebene DIN A4–Blätter. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 und 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter.
- Bei den **Aufgaben 3 und 4** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein.
- Tragen Sie Ihren Namen und Matrikelnummer in die dafür vorgesehenen Kästen auf Seite 3 ein und legen Sie nur die Seiten 3 und 4 Ihrer Ausarbeitung bei.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **12. 10. 2004** im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am **20. 10. 2004** statt.

  VIEL ERFOLG!!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben und bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum **21. 10. 2004** in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1: (15 Punkte)

a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y + 2z\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= 3y + 2z\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie für das autonome System

$$\begin{aligned}x'(t) &= 1\\ y'(t) &= y + 2z\\ z'(t) &= 3y + 2z\end{aligned}$$

mit Hilfe von **a)** ein erstes Integral.

c) Zeigen Sie: $v(x, y, z) = 3e^x y - 2e^x z$ ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$v_x + (y + 2z)v_y + (3y + 2z)v_z = 0\,.$$

Bestimmen Sie eine weitere Lösung der partiellen Differentialgleichung, die zu $v(x, y, z)$ linear unabhängig und keine Konstante ist. In welchem Zusammenhang steht das autonome System von Teil **b)** zu dieser partiellen Differentialgleichung?

Aufgabe 2: (15 Punkte) Gegeben seien die Körper M, N und P, für die gilt:

- N ist ein Drehkegel mit dem Ursprung als Spitze, der z-Achse als Drehachse und der Winkel zwischen der z-Achse und einer Geraden auf dem Kegelmantel ist $\frac{\pi}{3}$.
- P ist die Kugel um den Ursprung mit Radius 2.
- M ist der Körper, der im Halbraum $z \geq 0$ liegt und von oben durch P und von unten durch N beschränkt ist.

Desweiteren sei die Massenfunktion (Dichte) $d(x, y, z) = 2 + y$, das Vektorfeld

$$g(x, y, z) = (e^x \sin z,\ 1,\ e^x \cos z)^t$$

und die Kurve K als Schnitt von N und P im Halbraum $z \geq 0$ gegeben.

a) Skizzieren Sie den Schnitt von M mit der (x, z)-Ebene.

b) Berechnen Sie unter Verwendung von Kugelkoordinaten die Masse und den Schwerpunkt des Körpers M, wenn dieser die Massenfunktion (Dichte) $d(x, y, z)$ besitzt.

c) Bestimmen Sie $\operatorname{rot} g$ und berechnen Sie

$$\int_K g\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Name: | | **Matrikel–Nr.:** | |

Aufgabe 3: (15 Punkte) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + ay' + y = r(x), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Zunächst sei $a = 0$. Bestimmen Sie die Lösung y_{hom} der homogenen Differentialgleichung $y'' + y = 0$.

Das charakteristische Polynom lautet $\boxed{\qquad\qquad}$.

$$y_{\mathrm{hom}} = \boxed{\qquad\qquad}$$

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_{p} der Differentialgleichung $y'' + y = \cos x$ mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes.

Geben Sie den Ansatz an.

$$\boxed{\qquad\qquad}$$

Wie sieht die partikuläre Lösung aus?

$$y_{\mathrm{p}} = \boxed{\qquad\qquad}$$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung y_{p} der Differentialgleichung $y'' + y = -3 \sin x \cos x$.

$$\begin{array}{|llll|}\hline c_1' \qquad & + c_2' \qquad & = \qquad & \\ c_1' & + c_2' & = & \\ \hline\end{array}$$

$$c_1' = \boxed{\qquad\qquad} \qquad c_1 = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$c_2' = \boxed{\qquad\qquad} \qquad c_2 = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$y_{\mathrm{p}} = \boxed{\qquad\qquad}$$

d) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat die Differentialgleichung $y'' + ay' + y = 0$ Lösungen der Form $y = xe^{kx},\ k \in \mathbb{R}$?

$$a \in \boxed{\Big\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\}}$$

Wie sehen die entsprechenden Lösungen aus?

$$y \in \boxed{\Big\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\}}$$

Aufgabe 4: (15 Punkte) Gegeben sei in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{Z}$ das Vektorfeld $g_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$g_a(x, y, z) = (az\sin(ax), z\cos y, -a^2\cos x + \sin y)^t.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g_a$:

$$\operatorname{rot} g_a = \boxed{\Big(\qquad , \qquad , \qquad \Big)^t}$$

b) Für welche Werte des Parameters a besitzt das Vektorfeld g_a ein Potential ?

$$a = \boxed{\qquad\qquad}\,.$$

c) Bestimmen Sie zu dem größten a eine Potentialfunktion u:

$$u = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

d) Im $\mathbb{R}^3$ sei W die Strecke von $(0, 0, 1)$ nach $(0, 0, 0)$ und C der Viertelkreis um $(0, 0, 2)$ mit Radius 1, der bei $(1, 0, 2)$ beginnt und zu $(0, 0, 1)$ führt. Geben Sie eine Parameterdarstellung von W und von C an:

$$W(t) = \boxed{\Big(\qquad , \qquad , \qquad \Big)^t,\ t \in \qquad}$$

$$C(t) = \boxed{\Big(\qquad , \qquad , \qquad \Big)^t,\ t \in \qquad}$$

e) Berechnen Sie $I_1 = \int\limits_W g_a\,\mathrm{d}x$ und $I_2 = \int\limits_C g_1\,\mathrm{d}x$

$$I_1 = \boxed{\qquad\qquad} \qquad I_2 = \boxed{\qquad\qquad}\,.$$